



# НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	4 курс, осінній ( або весняний) семестр
Обсяг дисципліни	4 кредити ЄКТС (120 годин), з них лекції 36 години, практичні заняття 18 годин, самостійна робота 66 годин
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік/модульна контрольна робота, розрахункова робота
Розклад занять	<a href="http://roz.kpi.ua">http://roz.kpi.ua</a> , <a href="https://schedule.kpi.ua">https://schedule.kpi.ua</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович Практичні: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович <a href="mailto:viktor.gera@gmail.com">viktor.gera@gmail.com</a>
Розміщення курсу	платформа дистанційного навчання Sikorsky Distance, електронний кампус КПІ <a href="http://esampus.kpi.ua">esampus.kpi.ua</a> , сайт кафедри, інформаційні ресурси бібліотеки, група в Telegram Підручник: <i>Герасимчук В.С., Ребенчук Т.В., Герасимчук І.В.</i> Метод оберненої задачі розсіяння та його застосування. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019 (2-е видання). – 110 с. Режим доступу <a href="https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46097">https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46097</a>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

##### 1.1. Опис навчальної дисципліни

Метою викладання дисципліни є розкриття основних наукових понять та уявлень *нелінійної математичної фізики*, а також формування у студентів інтегральної компетентності — здатності до логічного мислення, формування особистості студентів; розвиток їх інтелекту і здібностей; здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі в галузі математики, механіки, фізики, економіки тощо.

*Нелінійність* в широкому сенсі – це синонім неоднозначності, складності, багатоваріантності. Тільки в нелінійних системах можливі процеси самоорганізації. У пропонованому курсі йтиметься про нелінійні моделі, що стали потужним інструментом пізнання не лише у фізиці та техніці, але і в біології, економіці, соціології. Обговорюватимуться базові моделі нелінійних процесів, з яких випливає, за яких умов нелінійна система може володіти декількома можливими стаціонарними станами, демонструвати коливальні, стохастичні або складні просторово-часові динамічні режими.

Отже метою дисципліни є сучасні уявлення про закономірності, притаманні нелінійним явищам, методи

побудови та дослідження моделей нелінійних природних явищ і процесів. Йтиметься про аналітичні методи, що дозволяють отримувати явні, точні розв'язки та значення для найважливіших параметрів нелінійних процесів в модельних задачах нелінійної математичної фізики.

Програмні компетентності:

### Загальні компетентності (ЗК)

- ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК 3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.
- ЗК 7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
- ЗК 8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.
- ЗК 12 Здатність працювати автономно.
- ЗК 17 Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчанні і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів.

### Фахові компетентності (ФК)

- ФК 1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- ФК 3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізнити основні ідеї від деталей і технічних викладок.
- ФК 4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих.
- ФК 5 Здатність до кількісного мислення.
- ФК 6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.
- ФК 8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.
- ФК 14. Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.

## 1.2. Предмет вивчення дисципліни

Предмет навчальної дисципліни – нелінійні рівняння математичної фізики. Тобто рівняння, що не володіють властивістю лінійності і які використовуються у природознавстві як математичні моделі нелінійних явищ в різних суцільних середовищах. Головною особливістю цих рівнянь (їх називають також еволюційними) є розв'язки, які описують *стійкі усамітнені локалізовані стани*, звані *солітонами*, які в тому чи іншому вигляді існують в суцільних середовищах різної фізичної природи.

Теорія нелінійних рівнянь, наука дуже молода, але вкрай важлива в нашому нелінійному світі, викристалізувалась в новий розділ нелінійної математичної фізики лише в середині ХХ століття, завдяки створенню потужного математичного апарату, що дозволяє, в принципі, знаходити точні аналітичні розв'язки низки нелінійних рівнянь у частинах похідних. Іншим поштовхом став розвиток обчислювальної техніки, що дозволило перейти до безпосереднього чисельного розв'язування рівнянь у частинних похідних, які описують поширення нелінійних хвиль. Основні положення теорія нелінійних хвиль лише формуються, а методи розробляються і узагальнюються.

Дана дисципліна є теоретичною основою сукупності знань та вмінь, що формують сучасний математичний апарат, необхідний для розуміння та освоєння курсів з профільних дисциплін напряму Математика.

## 1.3. Результати навчання (РН)

- Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають демонструвати **програмні результати навчання**:
- РН 11 Вміти розв'язувати конкретні математичні задачі сформульовані у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення із застосуванням спеціальних функцій;
  - РН 12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації.
  - РН 19 Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні функції для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

## 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни

Освітній компонент «Нелінійні рівняння математичної фізики» викладається у сьомому (або восьмому) семестрі і є одним із важливіших курсів професійної підготовки бакалаврів спеціальності «Математика». Цей курс дає систематизоване викладення основних нелінійних рівнянь, їх численних теоретичних та практичних застосувань. Ця дисципліна має глибокі логічні зв'язки з попередніми дисциплінами навчального плану математичної підготовки бакалаврів.

Навчальна дисципліна «Нелінійні рівняння математичної фізики» спирається на апарат аналітичної геометрії, лінійної та векторної алгебри, математичного та функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, числових і функціональних рядів, ТФКЗ, перетворень Фур'є, методів математичної фізики та інших дисциплін бакалаврського рівня вищої освіти і забезпечує певні дисципліни магістерського рівня.

### 3. Зміст навчальної дисципліни

#### Розділ 1. Нелінійні рівняння: основні поняття та означення

Тема 1.1. Еволюційні нелінійні рівняння. Рівняння Кортевега-де Вріза

Тема 1.2. Задача Фермі-Паста-Улама та солітон Забускі й Крускала.

#### Розділ 2. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь

Тема 2.1. Метод Хіроті.

Тема 2.2. Методи перетворення Беклунда та Дарбу.

#### Розділ 3. Метод оберненої задачі розсіяння (МОЗР)

Тема 3.1. Пряма та обернена задачі розсіяння

Тема 3.2. Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко. Дискретний спектр в оберненій задачі розсіяння. Закони збереження.

#### Розділ 4. Рівняння Клейна-Гордона та пов'язані з ним моделі

Тема 4.1. Рівняння синус-Гордона.

Тема 4.2. Двосолітонні розв'язки рівняння синус-Гордона.

### 4. Навчальні матеріали та ресурси

#### Базова література

1. *Bullough R.K., Caudrey P.J.* Solitons. – Springer Science & Business Media, 2013. – 392 pp.
2. *Lakshmanan M.* Solitons: Introduction and Applications. – Springer Science & Business Media, 2012. – 367 pp.
3. *Trullinger S.E., Zakharov V.E., Pokrovsky V.L.* Solitons. – Elsevier, 2012. – 916 pp.
4. *Manton N., Sutcliffe P.* Topological solitons. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. – xii+493 pp.
5. *Герасимчук В.С., Ребенчук Т.В., Герасимчук І.В.* Метод оберненої задачі розсіяння та його застосування. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019 (2-е видання). – 110 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46097>.

#### Допоміжна

6. *Eilenberger G.* Solitons: Mathematical Methods for Physicists. – Springer Science & Business Media, 2012. – 194 pp.
7. *Guo B., Pang X-F., Wang Yu-F., Liu N.* Solitons. – Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018. – 376 pp.
8. *Galaktionov V. A., Vázquez J.L.* A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations: A Dynamical Systems Approach. – Springer Science & Business Media, 2003. – 377 pp.
9. *Dauxois T, Peyrard M.* Physics of Solitons. – Cambridge University Press, 2006. – 422 pp.

#### Інформаційні ресурси

<https://www.youtube.com/watch?v=vbeEXUs5j7Y>

<http://physics.aps.org/articles/v6/15>

<http://ir.on.ufanet.ru/soliton/gallery.htm>

[http://homepages.tversu.ru/~s000154/collision/main\\_rk.html](http://homepages.tversu.ru/~s000154/collision/main_rk.html)

- [Solitons Home Page](#) (Heriot-Watt University, Edinburgh)
- [Soliton-Lab Art Gallery. Many Faces of Solitons](#) (Kyoto University)
- [Nonlinear Physics Group](#) (Australian National University)
- [Klaus Brauer's SOLITON Page](#) (University of Osnabrück)
- [Light Bullet Home Page](#) (Simon Fraser University)
- <http://theor.jinr.ru/~shnir/Solitons/345.html> (University of Oldenburg)
- [Harmonic maps and integrable systems](#) (ed. A.P. Fordy and J.C. Wood)

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### Лекційні заняття

#### Розділ 1. Нелінійні рівняння: основні поняття та означення

Тема 1.1. Еволюційні нелінійні рівняння. Рівняння Кортевега-де Вріза

Лекція 1. Лінійні та нелінійні хвилі. Нелінійність та дисперсія. Відкриття відокремленої хвилі(хвилі переносу).

Лекція 2. Рівняння Кортевега-де Вріза. Його точний розв'язок типу біжучої хвилі.

Тема 1.2. Задача Фермі-Паста-Улама та солітон Забускі й Крускала

Лекція 3. Задача Фермі-Паста-Улама з квадратичною нелінійністю. Асимптотичний метод автомодельної редукції. Рівняння Буссинеска.

Лекція 4. Задача Фермі-Паста-Улама з кубичною нелінійністю. Модифіковане рівняння Кортевега-де Вріза. Солітон Забускі й Крускала.

## **Розділ 2. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь**

Тема 2.1. Метод Хіרותи

Лекція 5. Метод Хіרותи: односолітонний розв'язок рівняння Кортевега-де Вріза.

Лекція 6. Дво- та  $N$ -солітонні розв'язки: взаємодія солітонів рівняння Кортевега-де Вріза.

Тема 2.2. Методи перетворення Беклунда та Дарбу

Лекція 7. Перетворення Беклунда для рівняння Кортевега-де Вріза. Солітонні розв'язки.

Лекція 8. Метод перетворення Дарбу.

## **Розділ 3. Метод оберненої задачі розсіяння (МОЗР)**

Тема 3.1. Пряма та обернена задачі розсіяння

Лекція 9. Обернена задачі розсіяння та аналіз Фур'є. Пара Лакса для рівняння Кортевега-де Вріза.

Лекція 10. Пряма задача розсіяння. Властивості даних розсіяння. Коефіцієнт відбиття та інтегральна формула Коші.

Тема 3.2. Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко. Дискретний спектр в оберненій задачі розсіяння. Закони збереження

Лекція 11. Рівняння оберненої задачі розсіяння у відсутності дискретного спектра. Формула обернення.

Лекція 12. Дискретний спектр рівняння Шредінгера та його властивості.

Лекція 13. Рівняння оберненої задачі розсіяння за наявності дискретного спектра.

Лекція 14. Закони збереження.

## **Розділ 4. Рівняння Клейна-Гордона та пов'язані з ним моделі**

Тема 4.1. Рівняння синус-Гордона.

Лекція 15. Модель Скірма в теорії поля. Рівняння синус-Гордона.

Лекція 16. Методи Хіרותи та перетворення Беклунда для рівняння синус-Гордона.

Тема 4.2. Двосолітонні розв'язки рівняння синус-Гордона

Лекція 17. Взаємодія топологічних солітонів рівняння синус-Гордона: кінк-кінк, кінк-антикінк.

Лекція 18. Взаємодія топологічних солітонів: зв'язані стани, брізери.

### **Практичні заняття**

Завдання циклу практичних занять: засвоєння основних аналітичних методів розв'язання нелінійних рівнянь. Відпрацювання навичок самостійного розв'язування рівнянь солітонного типу.

## **Розділ 1. Нелінійні рівняння: основні поняття та означення**

Тема 1.1. Еволюційні нелінійні рівняння. Рівняння Кортевега-де Вріза

*Заняття 1.* Основні принципи розповсюдження лінійних хвиль. Задача Коші для рівняння дифузії: осцилюючий розв'язок та кноїдальні хвилі. Дисперсійні та недисперсійні лінійні рівняння.

Тема 1.2. Задача Фермі-Паста-Улама та солітон Забускі й Крускала

*Заняття 2.* Нелінійні рівняння з дисипацією: рівняння Бюргерса. Перетворення Коула-Хопфа.

## **Розділ 2. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь**

Тема 2.1. Метод Хіרותи

*Заняття 3.* Білінійний оператор Хіרותи та дії з ним.

Тема 2.2. Методи перетворення Беклунда та Дарбу

*Заняття 4.* Застосування перетворення Беклунда.

## **Розділ 3. Метод оберненої задачі розсіяння (МОЗР)**

Тема 3.1. Пряма та обернена задачі розсіяння

*Заняття 5.* Знаходження рівняння Кортевега-де Вріза із необхідної та достатньої умов сумісності пари Лакса.

Тема 3.2. Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко. Дискретний спектр в оберненій задачі розсіяння. Закони збереження

*Заняття 6.* Обчислення даних розсіювання за заданим потенціалом рівняння Шредінгера

*Заняття 7.* Обчислення коефіцієнтів відбиття. Доведення формули обернення для  $n = 2$ .

## **Розділ 4. Рівняння Клейна-Гордона та пов'язані з ним моделі**

Тема 4.1. Рівняння синус-Гордона.

Заняття 8. Лоренц-інваріантні розв'язки рівняння синус-Гордона.

Тема 4.2. Двосолітонні розв'язки рівняння синус-Гордона

Заняття 9. Взаємодія солітонів: двосолітонні розв'язки.

## 6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студентів включає опрацювання лекційного матеріалу, підготовку до практичних занять, виконання домашніх завдань та індивідуального семестрового завдання. Індивідуальні завдання припускають комп'ютерне моделювання нелінійних математичних моделей.

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### 7.1. Форми роботи

Навчальні заняття зазвичай проводяться у навчальних аудиторіях в off-line режимі; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі із застосуванням усіх доступних наочних засобів подання матеріалу (Zoom, Meet Google, Skype та інше). Додатково студенти отримують всі навчальні та методичні матеріали по e-mail, telegram-каналю або в електронному кампусі.

#### 7.2. Правила відвідування занять

Заняття проводяться згідно з розкладом у навчальних аудиторіях; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі з використанням доступних засобів відео зв'язку за умови однозначної ідентифікації здобувача вищої освіти. Проведення занять в on-line режимі регламентується відповідним наказом по КПІ ім. Ігоря Сікорського.

За наявності поважних причин здобувач вищої освіти повинен завчасно (за 1 день) повідомити викладача про можливий пропуск контрольного заходу. Протягом наступного тижня здобувач вищої освіти має звернутися до викладача для погодження форми та порядку усунення заборгованості.

Якщо аудиторне заняття випадає на неробочий (святковий) день, то матеріал такого заняття частково переноситься в категорію «Самостійна робота студентів», а частково додається до наступного заняття.

#### 7.3. Правила призначення заохочувальних та штрафних балів

##### Заохочувальні бали:

До 5 балів – за активну роботу щонайменше на 5-ти заняттях (обґрунтовані відповіді на запитання, самостійне розв'язування задач та їх аналіз, участь в обговореннях);

До 10 балів – студенту, який підготував і подав для у часті у студентській науковій конференції матеріал за тематикою навчальної дисципліни (за умови доповіді на конференції).

##### Штрафні бали:

Під час воєнного стану – не застосовуються.

## 8. Політика університету

### 8.1. Політика щодо академічної доброчесності

Безумовне дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділ 3).

Усі завдання мають виконуватися самостійно! Співпраця студентів дозволена лише при розв'язанні проблемних завдань, але свій розв'язок кожен студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту/заліку категорично забороняється і будь-яка така діяльність вважається порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, детальніше: <https://kpi.ua/code>

### 8.2. Норми етичної поведінки

Безумовне дотримання норм етичної поведінки, визначених у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; детальніше: <https://kpi.ua/code>

## Оцінювання та контрольні заходи

### 9. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

#### 9.1. Види контролю

Вид контролю	Спосіб контролю
Поточний контроль	Перевірка виконання індивідуальних завдань, опитування за темою заняття, модульні контрольні роботи

Календарний контроль	Проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу
Семестровий контроль	Залік
Умови допуску до семестрового контролю	Семестровий рейтинг студента не менше 60 балів, за умови зарахування усіх індивідуальних завдань

## 9.2. Рейтингова система оцінювання результатів навчання

Головна частина рейтингу студента формується завдяки активній творчій праці на практичних заняттях, виконанні індивідуальних домашніх завдань та результатах модульної контрольної роботи.

Види контролю:

- поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий);
- календарний контроль проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

### 1. Поточний контроль

Включає: експрес-опитування, опитування за темою заняття, написання МКР, захист індивідуальних завдань.

#### 1. Робота на практичних заняттях

Ваговий бал – 2, якість роботи – 0 - 2 (відповідь: повна – 2, неповна –1, відсутня – 0, бездоганна – 4).

Максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях – не обмежена.

#### 2. Модульна контрольна робота

Складається з 2-х частин і виконується перед календарним контролем (атестацією) за пройденим на момент її написання матеріалом. Кожна частина модульної контрольної оцінюється в 14 балів. Максимальна кількість балів за МКР – 28.

Переписування контрольної роботи з метою підвищення балу – не передбачене.

#### 3. Індивідуальні домашні завдання

Ваговий бал – 8. Оцінюється кожне індивідуальне завдання у процентному відношенні до правильно розв'язаних задач. Максимальна кількість балів за 4 індивідуальні завдання складає:  $4 \times 8 = 32$  бали.

Кожне індивідуальне завдання захищається особисто.

**Загальний семестровий рейтинговий бал:**

$$R = R_{\text{ПЗ}} + R_{\text{МКР}} + R_{\text{ІДЗ}} = R_{\text{ПЗ}} + 28 + 32,$$

де  $R_{\text{ПЗ}}$  – максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях,  $R_{\text{МКР}}$  – максимальна кількість балів за модульну контрольну роботу,  $R_{\text{ІДЗ}}$  – максимальна кількість балів за індивідуальні завдання.

### 2. Календарний контроль

Здійснюється двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу

Критерій	Перший	Другий
Термін	8-й тиждень	14-й тиждень
Умови отримання позитивного результату	якщо поточний рейтинговий бал складає не менше 50% від максимально можливого балу на момент календарного контролю	якщо поточний рейтинговий бал складає не менше 50% від максимально можливого балу на момент календарного контролю

### 3. Семестровий контроль (залік)

Залік виставляється за результатами роботи семестрі. За основу береться загальний семестровий рейтинговий бал.

Якщо на момент семестрового контролю, за умови виконання всіх умов допуску до семестрового контролю, здобувача вищої освіти не задовольняє набрана кількість балів за семестр, то результати рейтингової оцінки скасовуються і здобувач вищої освіти здає залік. У цьому разі він може бути оцінений від 0 до 100 балів.

#### 4 Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

Не виконані умови допуску	Не допущено
---------------------------	-------------

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** професором кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь,  
доктором фіз.-мат. наук, професором Герасимчуком В.С.

**Ухвалено** кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 11 від 22.06.2023 р.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2023 р.)